



НОВЫЙ ПОДХОД В ИСПОЛЬЗОВАНИИ МАТЕМАТИЧЕСКОГО АППАРАТА В ПОСТРОЕНИИ ТРЕХМЕРНОЙ МОДЕЛИ ПОЗВОНОЧНИКА

А.В. Гладков¹, Ю.В. Сивец², К.Ю. Авдеева²

¹Новосибирский НИИ травматологии и ортопедии

²Новосибирский государственный технический университет

Представлена математическая модель с графической визуализацией, описывающая геометрические параметры позвоночника и условия их изменения во времени и пространстве.

Уменьшение размерности массива данных, необходимо для воспроизведения формы позвонка и хранения этой структуры в компьютере с наименьшими потерями, достигается путем использования алгоритма геометрической интерполяции и восстановления формы тела позвонка посредством тригонометрических интерполяционных сумм. Разработанная модель всего позвоночника базируется на трех концепциях. Для представления всего позвоночника используется сплайновая интерполяция. По данным, полученным в ходе вычисления переходных матриц, строится сплайновый полином. При этом требуется знание параметров не в каждой, а только в трех ключевых точках (основных отделах позвоночника). Применение сплайновой интерполяции значительно снижает временные затраты на вычисления переходных матриц. В разработанной модели учитываются геометрические особенности строения позвонков человека, а также изменения его кинематических характеристик в пространстве и во времени. Использование модели позволит наблюдать деформации всего позвоночника при изменении одного или нескольких произвольно выбранных параметров. Геометрические характеристики, необходимые для расчетов цепочки матриц второй модели, являются результатом вычислений первой модели. Имея набор статистических данных, предложенную модель можно использовать для наблюдения за реакцией позвоночника на различные возмущающие факторы. Графическая интерпретация модели позволит, задав начальные параметры позвоночника, получить его трехмерное изображение, перемещать, вращать, задавать направление действующих на него нагрузок, отслеживать изменение формы позвоночника при физиологических движениях и ходьбе.

Ключевые слова: математическое моделирование, позвоночник, графическая визуализация, метод тригонометрических интерполяционных сумм, сплайновая интерполяция.

NEW APPROACH TO APPLICATION
OF MATHEMATICAL APPARATUS
FOR THE CONSTRUCTION
OF THREE-DIMENSIONAL SPINE MODEL

A.V. Gladkov, Yu.V. Sivets, K.Yu. Avdeeva

The paper presents a mathematical model with graphic visualization, which describes spine geometric parameters and conditions of their changes in time and space.

Reduction of data file size necessary for reproduction of vertebra shape and storage of this structure in a computer with the least losses is achieved with algorithm of geometrical interpolation and vertebral body shape reconstruction — with trigonometric interpolation sums (TIS). The developed spine model is based on three concepts. A spline interpolation is used for reproduction of the whole spine. The spline polynomial is built on data received by calculation of transition matrices. This requires the parameters of not each point, but only of three key ones (in the basic spine levels). Application of spline interpolation considerably reduces time expenses for transition matrices calculation. The developed model takes into account the geometrical features of human vertebra, and changes of its kinematic characteristics in space and time. The model will allow observation of deformation of the whole spine caused by change of one or several randomly chosen parameters. Thus the geometrical characteristics necessary to calculate matrix chain of the second model are the results of the first model calculations. Having a set of the statistical data, the given model can be used for observation of spine response to various disturbing factors. After assigning initial spine parameters a graphic interpretation of the model will enable to receive a three-dimensional spine image, to shift and rotate it, to assign a direction of load application, to trace the changes in the spine shape during physiological movements and walking.

Key words: mathematical modelling, spine, graphic visualization, method of trigonometric interpolating sums, spline interpolation

Hir. Pozvonoc. 2005;(1):100–104.

Наиболее перспективным методом изучения биомеханики нормального и патологически измененного позвоночника считается математическое моделирование. Этот метод утвердил себя благодаря своей точности и отсутствию ограничений, связанных с риском получения осложнений при клинических исследованиях [6].

Моделирование – особый вид эксперимента, который находится по отношению к изучаемому объекту в структурно-функциональном сходстве и способен замещать его при изучении. Для этого метода требуется соблюдение принципа подобия, который устанавливает границы допустимого замещения моделью прототипа и экстраполяции результатов с модели на прототип. Исследования в этом направлении позволяют глубже проникнуть в патогенез дегенеративных изменений позвоночника при различных видах его деформации и обосновать преимущества выбираемого вида лечения.

За последние двадцать лет заметился заметный интерес к моделированию позвоночника человека. Он основывается, прежде всего, на желании предсказать поведение позвоночника при различных вариантах его патологии, когда применение других видов эксперимента невозможно. Эти случаи включают в себя проблемы катапультирования, использования привязных ремней в автомобиле, безопасности космических полетов, результатов хирургического лечения и т. д.

Формализовать, наиболее полно описать и прогнозировать реакции позвоночника на различные воздействия можно с помощью динамической модели позвоночника посредством методов математического моделирования. Но в настоящее время из-за отсутствия характеристик всего спектра сил, воздействующих на позвоночник, эта задача является труднодостижимой.

Поэтому целью данной работы является создание математической модели с графической визуализацией, описывающей геометрические параметры позвоночника и условия их из-

менения во времени и пространстве.

Тело позвонка – очень сложная геометрическая фигура, имеющая большую степень нелинейности, что затрудняет ее представление в электронном виде. В связи с этим целесообразно уменьшать размерность массива данных для хранения этой структуры в компьютере с наименьшими потерями для последующего воспроизведения формы позвонка. Следовательно, при отображении графической информации целесообразно использовать алгоритмы геометрической интерполяции и восстанавливать форму тела позвонка посредством тригонометрических интерполяционных сумм (ТИС).

Математический аппарат ТИС хорошо зарекомендовал себя при восстановлении сложных анатомических структур [4, 5]. Алгоритм дискретного преобразования Фурье, который лежит в основе ТИС, позволяет учитывать сложные поверхности с нелинейностью высоких порядков, что дает ему значительное преимущество по сравнению со сплайновой интерполяцией. Так как сплайн-функция строится полиномом третьей степени, то есть по четырем точкам, то отдельные отрезки сплайнов приходится «склеивать».

Краткое описание применяемого математического аппарата. Дано множество $G(N_1+1)(N_2+1)$ точек образца (гладкой) поверхности M анатомической структуры. Выбор параметрического представления заключается в определении координатных функций $x(u_1, u_2)$, $y(u_1, u_2)$ и $z(u_1, u_2)$, определенных на квадрате $U = [0,1] \times [0,1]$ таким образом, что $K(N_1, N_2)$ преобразуется на G .

Данный математический аппарат очень хорошо применим как для плоских, так и для трехмерных объектов, но при этом возникают трудности в представлении входных данных для функций ТИС, потому что они задаются набором точек, упорядоченных по контурам.

Более сложной задачей является графическое построение динамической модели всего позвоночника, где

он рассматривается в виде упругого стержня. В данной модели каждая матрица представляет отдельный позвонок, а цепочка матриц – позвоночник в целом.

Концепция построения трехмерной модели позвоночника

1. Исходными являются данные, снятые с рентгенограмм пациентов [2]. Позвоночник рассматривается как кинематическая цепь, звеньями которой являются позвонки и межпозвонковые диски. Выходными данными такой модели являются рассчитанные параметры позвоночника: высота тела позвонка; высота диска; угол наклона тела позвонка в сагиттальной и фронтальной плоскостях; угол наклона диска в сагиттальной и фронтальной плоскостях; смещение тел позвонков относительно друг друга в сагиттальной и фронтальной плоскостях; угол между телами позвонков в сагиттальной и фронтальной плоскостях.

2. Позвоночник представляется тремя хордами дуг – поясничного, грудного и шейного отделов позвоночника. Для каждого из трех звеньев можно ввести обобщенные координаты. Условия равенства координат связываемых точек:

$$\left. \begin{aligned} x_1 + L_1 \cos \varphi_1 &= x_2 - L_2 \cos \varphi_2 \\ y_1 + L_1 \sin \varphi_1 &= y_2 - L_2 \sin \varphi_2 \\ x_2 + L_2 \cos \varphi_2 &= x_3 - L_3 \cos \varphi_3 \\ y_2 + L_2 \sin \varphi_2 &= y_3 - L_3 \sin \varphi_3 \end{aligned} \right\},$$

где L_1 – длины хорд; φ_1 – углы наклона тел позвонков к оси (OX); x_i, y_i – координаты центров инерции звеньев (рис. 1).

Приведенные уравнения позволяют связывать звенья между собой. В механике они называются уравнениями связей. Так как каждое из свободных звеньев имеет три степени свободы, то система из трех свободных звеньев имеет девять степеней свободы. Уравнения связей дают возможность выразить какие-нибудь пять опорных координат через оставшиеся четыре, поэтому для определения положения трехзвенной модели

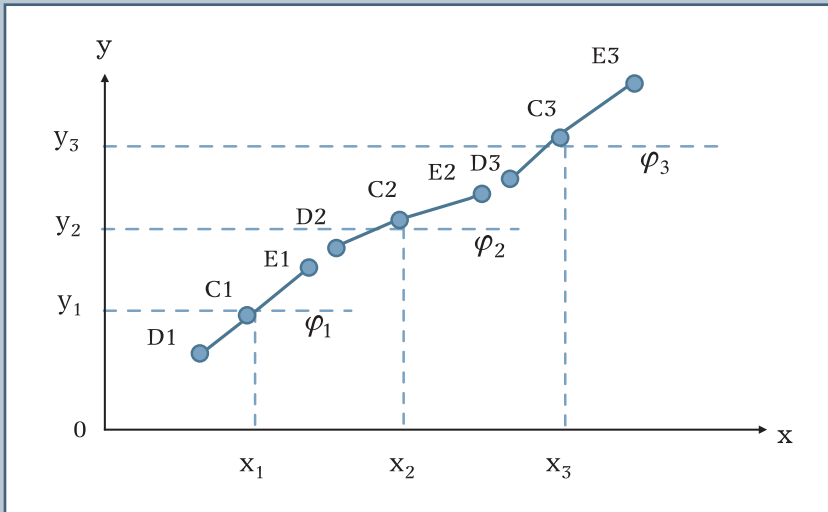


Рис. 1
Трехзвенная модель позвоночника

достаточно пять из девяти опорных координат. Модель имеет пять степеней свободы.

3. Позвоночник представляется в виде гибкого стержня. В этом случае используется модель, описывающая деформации гибкого стержня. Такая модель основана на матричных преобразованиях. Напряженно-деформированное состояние каждого сечения модели описывается вектором состояния \bar{Z}_i :

$$\bar{Z}_i = \begin{pmatrix} U_i \\ W_i \\ \Phi_i \\ M_i \\ Q_i \\ N_i \end{pmatrix},$$

где U_i – продольное перемещение; W_i – поперечное перемещение; Φ_i – угол поворота; M_i – изгибающий момент; Q_i – поперечная сила; N_i – осевая сила.

Связь между начальными значениями параметров состояния и их значениями в некотором сечении пред-

ставляется с помощью цепочки матриц уравнением:

$$\bar{Z}_n = \bar{A}_n \cdot \bar{A}_{n-1} \dots \bar{A}_0 \cdot \bar{Z}_0 = \bar{A}^* \cdot \bar{Z}_0,$$

где \bar{A}^* – цепочка переходных матриц, элементы которых содержат значения массы, момента инерции, круговой частоты, площади поперечного сечения, жесткости и длины элемента модели (позвонка). Каждая матрица интерпретирует отдельный позвонок. Таким образом, последовательное перемножение матриц дает цепочку взаимодействующих элементов. При изменении какого-либо параметра одной из матриц вносятся изменения в значения последующих элементов матриц и, соответственно, конечного результата. Для вычисления изменений предыдущих элементов необходимо последовательно решать обратное уравнение:

$$\bar{A}_0 \cdot \bar{A}_1 \dots \bar{A}_{i-2} \cdot X = \bar{A}_i,$$

где X – предыдущий измененный элемент, деформации в который вносит элемент \bar{A}_i . Это уравнение итерационно решается до первого элемента.

Проводя аналогию между геометрическими и физическими параметрами поведения гибкого стержня и позвоночника, можно предложить создание новой модели.

Для детальной интерпретации и отображения каждого позвонка используется математический аппарат ТИС. По частичным данным о форме позвонка с помощью ТИС вычисляются недостающие точки. По полученному массиву точек строится поверхность позвонка. Для ускорения работы алгоритма используется алгоритм быстрого преобразования Фурье при расчете сумм ТИС [3]. Исходными данными являются координаты упорядоченных точек контуров, полученных с рентгенограмм препаратов позвонков [1]. Пример построения такого контура виден на рис. 2.

Поверхность, построенная по исходному набору точек, показана на рис. 3, а результат работы программы – на рис. 4.

Для представления формы всего позвоночника используется сплайновая интерполяция. По данным, полученным в ходе вычисления переходных матриц, строится сплайновый полином. При этом требуется знание параметров не в каждой, а только в трех ключевых точках (основных отделах позвоночника). В качестве критерия адекватности модели реальным данным использована визуальная экспертная оценка.

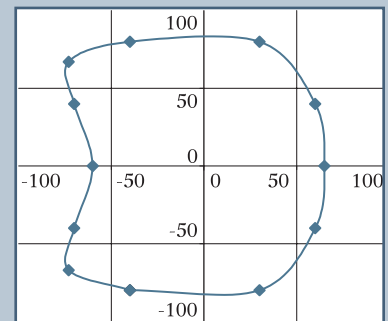


Рис. 2.
Точки первого контура

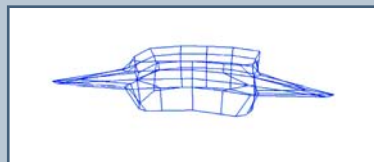


Рис. 3
Исходные данные (5 контуров по 17 точек)

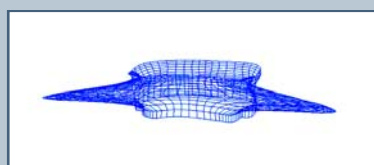


Рис. 4
Восстановленная поверхность (15 контуров по 120 точек)

Применение сплайновой интерполяции значительно снижает временные затраты на вычисления переходных матриц, а следовательно, на отображение модели.

На данном этапе разработки реализована графическая интерпретация модели позвоночника, представленного в виде кинематической цепочки элементов с расчетом основных диагностических параметров (рис. 5).

В разработанной модели учитываются геометрические особенности строения позвонков, а также изменения их кинематических характеристик в пространстве и во времени. Использование этой модели позволит наблюдать деформации всего позвоночника при изменении одного или нескольких произвольно выбранных параметров. При этом геометрические характеристики, необходимые для расчетов цепочки матриц A^* второй модели, являются результатом вычислений первой модели.

Имея набор статистических данных, эту модель можно использовать

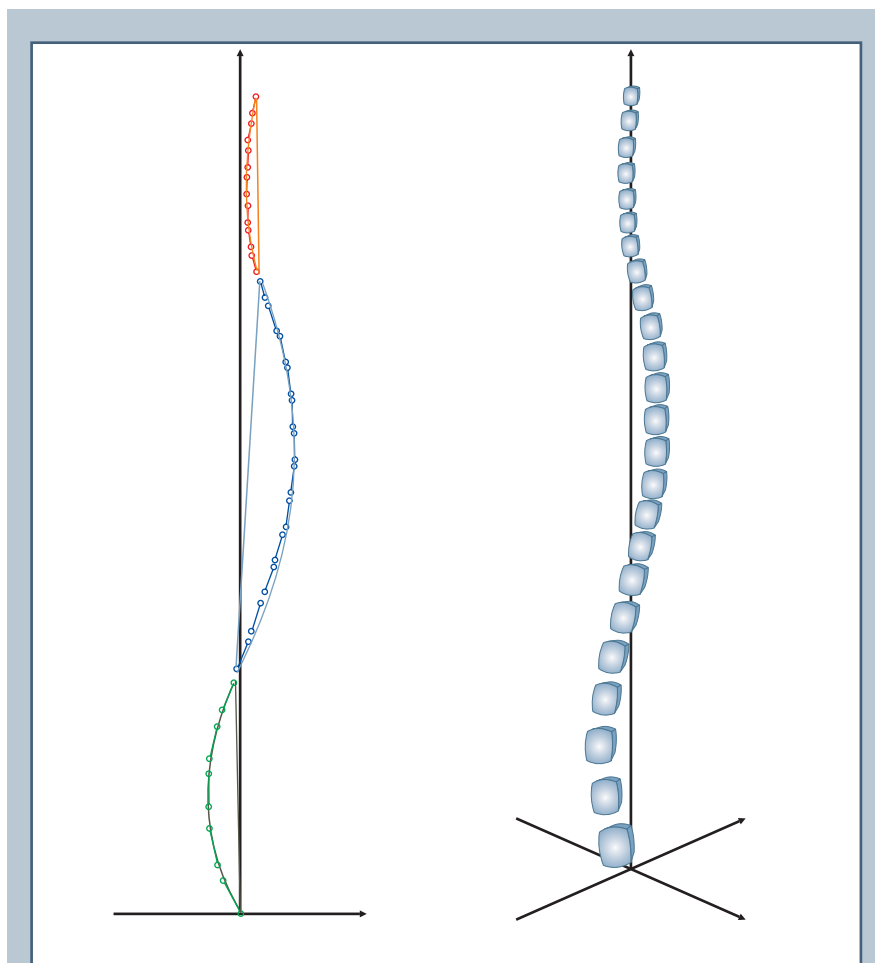


Рис. 5
Графическая реализация кинематической модели позвоночника

для наблюдения за реакцией позвоночника на различные возмущающие факторы: изменение формы позвонка, нарушение взаимоотношения смежных позвонков, изменения, вносимые различными хирургическими пособиями и т. д.

Графическая интерпретация модели позволит конечным пользователям, задав начальные параметры позвоночника, получить его трехмерное изображение, перемещать, вращать, задавать направление действующих на него нагрузок, отслеживать изменение формы позвоночника при физиологических движениях и ходьбе.

Выводы

1. Использование алгоритма ТИС и методов сплайновой интерполяции позволяет адекватно отражать форму каждого позвонка и всего позвоночника в пространстве и производить расчеты без потери качества отображения.
2. Использование трехмерной модели позвоночника позволит решать вопросы прогнозирования изменения деформации и результатов ее оперативной коррекции.

Литература

1. **Гладков А.В., Гусев А.Ф.** Морфометрия позвоночника // Повреждения и заболевания позвоночника. Л., 1986. С. 84–92.
2. **Гладков А.В., Пронских И.В.** Геометрия позвоночного столба // Актуальные вопросы вертебродологии: Сб. науч. тр. Ленинградского НИИТО. Л., 1988. С. 114–116.
3. **Нуссбаумер Г.** Быстрое преобразование Фурье и алгоритмы вычисления сверток М., 1985.
4. **Фроловский В.Д., Фроловский Д.В.** Моделирование и развертка поверхностей общего вида // VIII Всероссийская научно-практическая конференция по графическим информационным технологиям «КОГРАФ-98»: Тез. докл. Н. Новгород, 1999. С. 120–121.
5. **Jimenez J.C., Biscay R., Aubert E.** Parametric representation of anatomical structures of the human body by means of trigonometric interpolating sums // J. of Computational Physics. 1996. N 0135. P. 120–155.
6. **White A.A., Panjabi M.M.** Clinical Biomechanics of the Spine. Philadelphia, 1978.

Адрес для переписки:

Гладков Александр Вячеславович
630091, Новосибирск, Фрунзе, 17,
НИИТО,
AGladkov@niito.ru



ПОДПИСКА

ХИРУРГИЯ
ПОЗВОНОЧНИКА
Journal of Spine Surgery

ОБЪЕМ ИЗДАНИЯ 100 СТРАНИЦ, ПЕРИОДИЧНОСТЬ 4 РАЗА В ГОД.
ЖУРНАЛ СОДЕРЖИТ СПЕЦИАЛИЗИРОВАННУЮ ИНФОРМАЦИЮ,
ПОСВЯЩЕННУЮ ПРОБЛЕМАМ ХИРУРГИИ ПОЗВОНОЧНИКА
И СМЕЖНЫМ ДИСЦИПЛИНАМ.

СТОИМОСТЬ ПОДПИСКИ:

1400 р. ДЛЯ ФИЗИЧЕСКИХ ЛИЦ

2200 р. ДЛЯ ЮРИДИЧЕСКИХ ЛИЦ

ОФОРМЛЕНИЕ ПОДПИСКИ ОСУЩЕСТВЛЯЕТСЯ ПУТЕМ ПЕРЕВОДА
УКАЗАННОЙ СУММЫ НА РАСЧЕТНЫЙ СЧЕТ:

АНО «Клиника НИИТО»

Юрид. адрес : 630091, г. Новосибирск, ул.Фрунзе,17

ИНН 5406189081

р/с 40703810000000000012 в ОАО «Инвестиционный Городской банк»

БИК 045005703 к/с 30101810500000000703

ОКПО 55460378 ОКОНХ 91514

ПОЛУЧАТЕЛЬ: АНО «КЛИНИКА НИИТО»

НАЗНАЧЕНИЕ ПЛАТЕЖА: ПОДПИСКА НА ЖУРНАЛ
«ХИРУРГИЯ ПОЗВОНОЧНИКА»

Заполните талон для подписки на журнал
«Хирургия позвоночника»

Ваш индекс

Почтовый адрес

ФИО

Год выпуска

№ журнала

Количество экземпляров